**Πρόταση:** (πολύ βασική)

(ε-χαρακτηρισμός του supremum)

Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ κ' s ένας πραγματικός αριθμός,

ΤΑΕΙ

(1) $s = \sup A$

(2) (i) το s είναι α.φ. του A

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ με $x > s - \varepsilon$

(1) ⇒ (2) Αν $s = \sup A$ από τον ορισμό του supremum το s είναι α.φ. του A, δηλαδή ισχύει το (i). Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι δεν ισχύει το (ii), τότε $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $\forall x \in A$ να ισχύει $x \leq s - \varepsilon$.

Άρα $s - \varepsilon$ είναι α.φ. του A.

Συνεπώς, αφού $s = \sup A$ θα έχουμε $s \leq s - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq 0$, άτοπο. Άρα ισχύει (ii)

(2) ⇒ (1) Από το (1) το s είναι α.φ. του A.

Έστω s' ένα τυχαίο α.φ. του A (κ' ΝΔΟ $s \leq s'$)

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι δεν ισχύει $s \leq s'$, άρα $s > s' \Rightarrow s - s' >$

Θέτουμε $\varepsilon = s - s'$ (τότε $\varepsilon > 0$)

Από το (ii) $\exists x \in A$ με $x > s - \varepsilon$, δηλαδή $x > s - (s - s')$

$x > s - s + s'$

$x > s'$

Άτοπο (διότι το s' είναι α.φ. του A). Συνεπώς, $s \leq s'$, επομένως $s = \sup A$

**Σημείωση:** Αν είναι δεδομένο ότι το A είναι α.φ. λέμε ότι το (i) λέει ουσιαστικά ότι $\sup A \leq s$, ενώ το (ii) ουσιαστικά λέει ότι $s \leq \sup A$

**Πρόταση:** (ε-χαρακτηρισμός του infimum)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ κ' $\rho \in \mathbb{R}$

ΤΑΕΙ

(1) $\rho = \inf A$

(2) (i) το ρ είναι κ.φ. του A

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ με $x < \rho + \varepsilon$

**Απόδειξη:** Άσκηση.

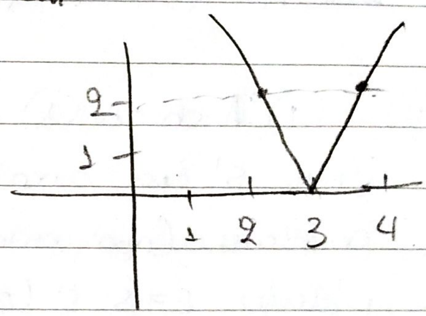
7) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2|x-3| = \begin{cases} 2x-6, & x \geq 3 \\ -2x+6, & x<3 \end{cases}$

(i) Είναι η f είναι 1-1;
είναι η f επί;
γρ. παρ. της f

(ii) Να $f(X)$ κ' $f^{-1}(X)$ για (α) $X = [\frac{1}{4}, 2)$
(β) $X = (-\infty, 4]$ κ' $X = (0, +\infty)$

$f(2) = 2$
$f(4) = 2$ άρα η f δεν είναι 1-1

$\nexists x \in \mathbb{R}$ ώστε $\underset{f(x)}{\underbrace{2|x-3|}} = -1$, άρα η f δεν είναι επί




Η f είναι ↘ γν. στο $(-\infty, 3]$
Η f είναι γν ↗ στο $[3, +\infty)$

$f([\frac{1}{4}, 2)) = (f(2), f(\frac{1}{4})] = (2, \frac{11}{2}]$

Εφόσον η f
είναι γν ↘ στο
$[\frac{1}{4}, 2) \subseteq (-\infty, 3]$

$f((-\infty, 4]) = f((-\infty, 3] \cup [3, 4]) = f((-\infty, 3]) \cup f([3, 4]) =$

$= [f(3), \lim_{x \to -\infty} f(x)) \cup [f(3), f(4)] = [0, +\infty) \cup [0, 2] = [0, +\infty)$

$f((0, +\infty)) = f((0, 3] \cup (3, +\infty)) = f((0, 3]) \cup f([3, +\infty)) =$

$= [f(3), f(0)] \cup [f(3), \lim_{x \to +\infty} f(x)) = [0, 6] \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$

♡ FAG ♡

$x \in f^{-1}([\frac{1}{4}, 2))$

$\Leftrightarrow f(x) \in [\frac{1}{4}, 2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le f(x) < 2$

$f(x) = 2|x-3|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le 2|x-3| < 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8} \le |x-3| < 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| < 1 \\ \frac{1}{8} \le |x-3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 \ge \frac{1}{8} \text{ ή } x-3 \le -\frac{1}{8} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x \ge \frac{25}{8} \text{ ή } x \le \frac{23}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, \frac{23}{8}] \cup [\frac{23}{8}, 4)$ για (i) $x = [\frac{1}{4}, 2)$

(ii) $x = (-\infty, 4]$

Υπενθύμιση: Αν $\theta > 0$

$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

$|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό αν

(i) $1 \in A$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, αν $x \in A$ τότε $x+1 \in A$

Παρατηρήσεις:

(α) Το $\mathbb{R}$ είναι επαγωγικό σύνολο

(β) Η τομή μιας οικογένειας επαγωγικών συνόλων είναι επαγωγικό σύνολο

Πράγματι, έστω $(A_i)_{i \in J}$ μια οικογένεια επαγωγικών συνόλων. Θδο το $\bigcap_{i \in J} A_i$ είναι επαγωγικό.

$\rightarrow 1 \in A_i \ \forall i \in J$, άρα $1 \in \bigcap_{i \in J} A_i$

→ Αν $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, τότε $x \in A_i$ $\forall i \in I$.

άρα (αφού κάθε $A_i$ είναι επαγωγικό)
$x+1 \in A_i$ $\forall i \in I$, άρα $x+1 \in \bigcap_{i \in I} A_i$

(γ) Το $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x>0\}$ είναι επαγωγικό

→ $1>0$, άρα $1 \in \mathbb{R}^+$
→ Αν $x \in \mathbb{R}^+$, τότε $x>0$, άρα $x+1>0+1$, δηλ $x+1>1$ κ' αφού $1>0$ προκύπτει
$x+1>0$, άρα $x+1 \in \mathbb{R}^+$

Ορισμός: Έστω $\mathcal{N}$ η συλλογή όλων των επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (δηλ.
$\mathcal{N} = \{A \in P(\mathbb{R}) : A$ επαγωγικός$\}$) (ισχύει $\mathcal{N} \neq \emptyset$ αφού όπως είδαμε $\mathbb{R} \in \mathcal{N}$)

Ορίζουμε $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{N}$ κ' ονομάζουμε το $\mathbb{N}$ σύνολο των φυσικών αριθμών.

Παρατηρήσεις:
(α) Το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο (ως τομή επαγωγικών)

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A$ επαγωγικό, τότε $A \in \mathcal{N}$, άρα $\bigcap \mathcal{N} \subseteq A$, δηλ $\mathbb{N} \subseteq A$

Πρόταση: Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ με $n>x$
(Ισοδύναμα: το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$)

Απόδειξη: Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο)
ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα της πρότασης, τότε
$\exists x \in \mathbb{R}$ ώστε $n \leq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή το $x$ είναι α.φ. του $\mathbb{N}$.
Έτσι το $\mathbb{N}$ είναι μη κενό κ' άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$,
άρα από το αξίωμα της πληρότητας έχει supremum
Θέτουμε $a = \sup \mathbb{N}$

Εφόσον $a-1<a=\sup\mathbb{N}$ το $a-1$ δεν είναι α.φ του $\mathbb{N}$, άρα $\exists n\in\mathbb{N}$ με $a-1<n$, άρα $a<n+1$

Εφόσον το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό κ' $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $n+1\in\mathbb{N}$. άτοπο. διότι $a=\sup\mathbb{N}$ κ' $a<n+1$

<u>Πρόταση:</u>

(i) $\forall x,y\in\mathbb{N}$ ισχύει $x+y\in\mathbb{N}$

(ii) $\forall x,y\in\mathbb{N}$ ισχύει $x\cdot y\in\mathbb{N}$

(iii) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}^+$

(iv) $\min\mathbb{N}=1$

(v) $0\notin\mathbb{N}$

(vi) Αν $n\in\mathbb{N}$ με $n>1$, τότε $n-1\in\mathbb{N}$

(vii) Αν $n,m\in\mathbb{N}$ με $n>m$, τότε $n-m\in\mathbb{N}$

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έστω $x\in\mathbb{N}$

Θέτουμε $A_x=\{z\in\mathbb{N}: x+y\in\mathbb{N}\}$

<u>Ισχυρισμός:</u> Το $A_x$ είναι επαγωγικό

<u>Απόδειξη:</u>

(α) Εφόσον $x\in\mathbb{N}$ έχουμε $x+1\in\mathbb{N}$, άρα $1\in A_x$

(β) Έστω $z\in A_x$, τότε $z\in\mathbb{N}$ κ' $x+z\in\mathbb{N}$, άρα $z+1\in\mathbb{N}$ κ' $(x+z)+1\in\mathbb{N}$

Άρα $z+1\in A_x$ $\qquad (x+z)+1 = x+(z+1)$

Εφόσον το $A_x$ είναι επαγωγικό θα έχουμε $\mathbb{N}\subseteq A_x$, άρα $\forall y\in\mathbb{N}$ ισχύει $y\in A_x$, δηλαδή $x+y\in\mathbb{N}$

(ii) Έστω $x\in\mathbb{N}$

Θέτουμε $B_x=\{z\in\mathbb{N}: x\cdot z\in\mathbb{N}\}$

Το $B_x$ είναι επαγωγικό

(α) $1\in B_x$, διότι $x\cdot 1=x\in\mathbb{N}$

(β) Αν $z\in B_x$, τότε $z\in\mathbb{N}$ κ' $x\cdot z\in\mathbb{N}$

Από το (i) εφόσον $x\in\mathbb{N}$ έχουμε $xz+x\in\mathbb{N}$

$xz+x = xz+x\cdot 1 = x(z+1)$ Άρα $z+1\in B_x$

Άρα $\mathbb{N} \subseteq B_x$, άρα $\forall y \in \mathbb{N}$, ισχύει $x \cdot y \in B_x$, άρα $x \cdot y \in \mathbb{N}$

(iii) Εφόσον το $\mathbb{R}^+$ είναι επαγωγικό σύνολο (όπως δείξαμε νωρίτερα) θα ισχύει $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$

(iv) Θέτουμε $A = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$
Αποδεικνύεται (....) ότι το $A$ είναι επαγωγικό. Άρα $\mathbb{N} \subseteq A$, άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n \in A$, δηλ. $n \geq 1$.

Επομένως, $\min \mathbb{N} = 1$

(v) Εφόσον (όπως έχουμε αποδείξει)
ισχύει $1 > 0$ κ' $\min \mathbb{N} = 1$, προκύπτει $0 \notin \mathbb{N}$

(vi) Ορίζουμε $S = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N}\ \ n-1 \in \mathbb{N}\}$

Ν.Ο. το $S$ είναι επαγωγικό.
→ $1 \in S$ (εξ' ορισμού)
→ Έστω $n \in S$ κ' ν.δ.ο $n+1 \in S$
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις
(α) Αν $n = 1$, τότε $1+1 \in \mathbb{N}$ κ' $(1+1)-1 = 1 \in \mathbb{N}$

(β) Αν $n \in \mathbb{N}$ με $n-1 \in \mathbb{N}$, τότε $n+1 \in \mathbb{N}$ κ' $(n+1)-1 = n \in \mathbb{N}$, άρα $n+1 \in S$

Συνεπώς το $S$ είναι επαγωγικό, άρα $\mathbb{N} \subseteq S$. άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$ θα ισχύει $n-1 \in \mathbb{N}$

(vii) Θέτουμε $A = \{m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$ με $n > m$ ισχύει $n - m \in \mathbb{N}\}$
Αρκεί ν.δ.ο. το $A$ είναι επαγωγικό.

→ Από το (vi) έχουμε $1 \in A$
→ Έστω $m \in A$ ν.δ.ο. $m+1 \in A$, αφού $m \in A$
Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n > m+1$, τότε (αφού $m+1 > m$) θα ισχύει $n > m$, άρα έχουμε $n - m \in \mathbb{N}$

Εδώ αφού $n>m+1$ θα έχουμε $n-m>1$

Από το (iii) (για το $n-m$) προκύπτει $(n-m)-1\in\mathbb{N}$, δηλαδή $n-(m+1)\in\mathbb{N}$

Επομένως $m+1\in A$

<u>Πρόταση</u>: Αν $n\in\mathbb{N}$ $\nexists x\in\mathbb{N}$ με $n<x<n+1$.

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $\exists x\in\mathbb{N}$ με $n<x<n+1$

Τότε $x-n\in\mathbb{N}$ (σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση)

κ' $x-n<1$, άτοπο. Διότι $1=\min\mathbb{N}$

<u>Παρατήρηση</u>: Η τελευταία πρόταση λέει ότι $\forall n\in\mathbb{N}$ τα $n, n+1$ είναι διαδοχικά στη διάταξη του $\mathbb{N}$